# huitième partie:

## Cinématique et dynamique du corps solide indéformable

Notions abordées:

- 8.1 Cinématique du solide, distribution des vitesses
- 8.2 Théorèmes relatif au moment cinétique
- 8.3 Calcul du moment cinétique
- 8.4 Energie cinétique
- 8.5 Roulement sans glissement
- 8.6 Rotation autour d’un axe fixe
- 8.7 Rotation autour d’un point fixe

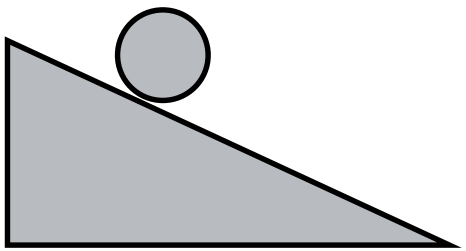
Buts:

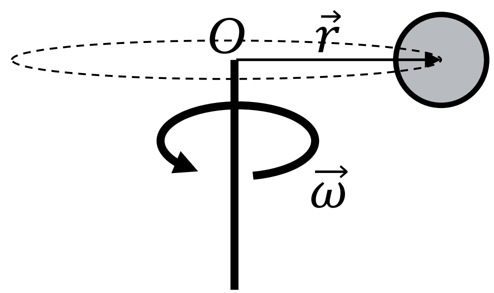
- apprendre à décrire le mouvement d’un corps solide
- savoir écrire les équations du mouvement d’un corps solide (théorèmes du centre de masse et du moment cinétique)

# 8.1 Comparaison qualitative

## Point materiel de masse $m$

Glissement ou rotation



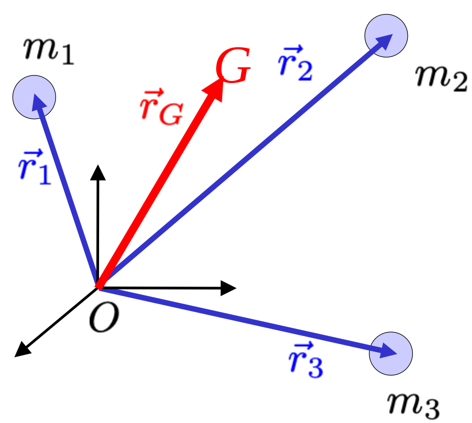



$\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v}$

$\sum_{\alpha}^{N}$

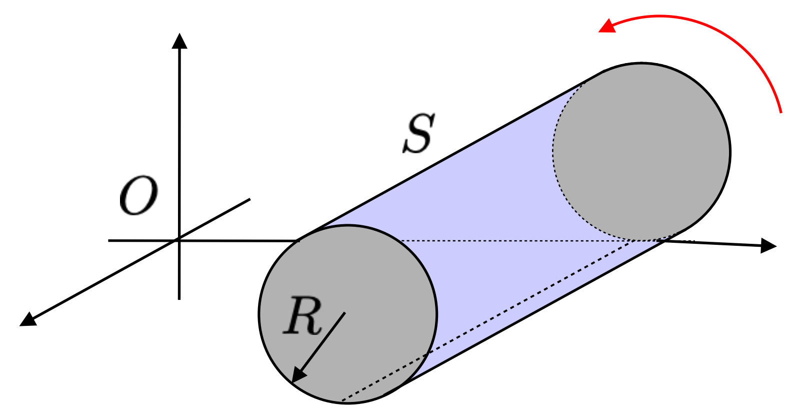
## System de points matériels




$$\vec{F} = \sum_{\alpha} m_{\alpha}\vec{a}_{\alpha} = M\vec{a}_G \qquad \vec{L}_O = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \wedge m_{\alpha}\vec{v}_{\alpha}$$

## Solide indéformable

Glissement et rotation




$$\int \rho \ldots dr^3$$

$\vec{F} = M\vec{a}_G$

$\vec{L}_O = \tilde{I}\vec{\omega}$

$\tilde{I}$ est le moment d'inertie

# 8.1 Corps solide indéformable

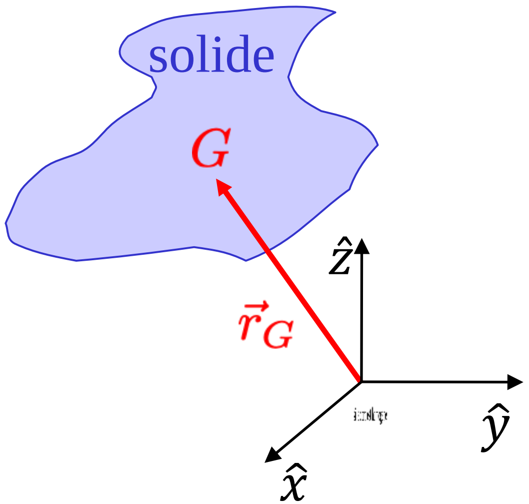
- Définition: **solide indéformable = système de points matériels, fixes les uns par rapport aux autres**

- Remarques:
  - Tous les corps solides réels se déforment sous l'effet des forces appliquées; le solide indéformable est un modèle mathématique (bonne approximation si les déformations sont petites par rapport aux dimensions du solide).
  - Le nombre N de points matériels peut être très grand ($N \to \infty$); on remplace alors les sommes sur ces $N$ points par des intégrales. Par exemple, pour le centre de masse:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M}\sum_{\alpha} \vec{r}_\alpha m_\alpha \quad \to \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm(\vec{r}) = \frac{1}{M}\int_{\text{Volume}} \vec{r}\rho(\vec{r})\, d^3\vec{r} \qquad \rho(\vec{r}) = \frac{dm(\vec{r})}{d^3 r}$$

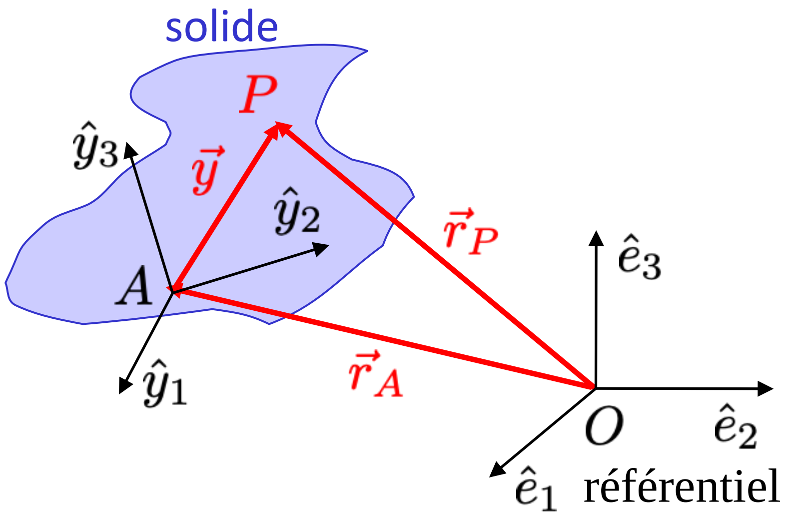
si le corp est homogene $\rho(\vec{r}) = \frac{M}{V}$

- Position d'un solide:




  - **6 coordonnées indépendantes**
  - Ex., : position d'un point + orientation du solide
    - 3 coord. pour un des points
    - 3 angles pour définir l'orientation du solide par rapport à ce point
  - Ex., vitesse d'un point $A$ $\vec{v}_A$ (3 composantes du vecteur) +
    une vitesse de rotation $\vec{\omega}$ (3 composantes du vecteur)

# 8.1 Vitesse et accélération d'un point du solide




- Repère lié au référentiel $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$
- Repère lié au solide $A\hat{y}_1\hat{y}_2\hat{y}_3$
  (A = point quelconque du solide)
  - Tous les points P du solide sont immobiles dans ce repère
  - Pour tout vecteur $\vec{y}$ immobile dans ce repère on a:

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum y_i\,\hat{y}_i\right) = \sum y_i \underbrace{\frac{d\hat{y}_i}{dt}}_{\vec{\omega}\wedge\hat{y}_i} = \vec{\omega}\wedge\sum y_i\,\hat{y}_i = \vec{\omega}\wedge\vec{y}$$

formule de Poisson

$\vec{\omega}$ = vitesse angulaire instantanée de rotation du repère $A\hat{y}_1\hat{y}_2\hat{y}_3$, donc du solide

- Pour tout point P du solide (par rapport à $O\hat{e}_1\hat{e}_2\hat{e}_3$) :

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_A + \overrightarrow{AP}) = \vec{v}_A + \frac{d}{dt}\overrightarrow{AP} = \vec{v}_A + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AP}$$
$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_A + \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AP}) = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}}\wedge\overrightarrow{AP} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AP})$$

Avec $\vec{\omega}$ indépendant de $P$, de $A$ et du choix du repère $A\hat{y}_1\hat{y}_2\hat{y}_3$

# 8.1 Mouvement instantané d'un solide (cinématique)

- Soit A un point quelconque du solide: $\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}}$ $\forall P \in \text{solide}$

$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}'_P + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}$ avec $\vec{v}'_P = 0$

On peut trouver les mêmes relation pour $\vec{v}_P$ et $\vec{a}_P$ en utilisant les formules pour le changement de référentiel

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_A + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AP}\right) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{AP}}$$

$\vec{a}_P = \vec{a}'_P + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'_P + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O'P}\right) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \overrightarrow{O'P}$ avec $\vec{v}'_P = 0, \vec{a}'_P = 0, O' = A$

- Le <u>mouvement instantané</u> du solide est l'un des quatre suivants:

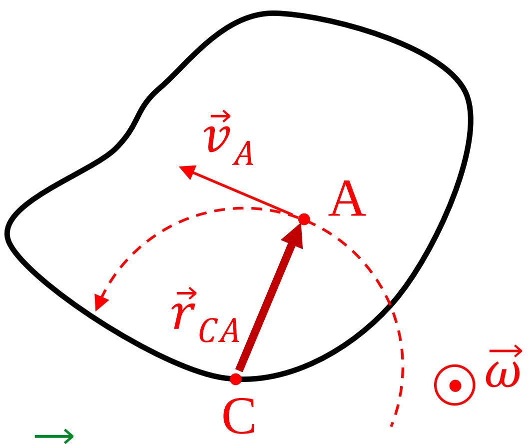
- $\vec{\omega} = 0$ et $\vec{v}_A = 0$ $\Leftrightarrow \vec{v}_P = 0$ $\forall P$ $\Leftrightarrow$ solide au repos
- $\vec{\omega} = 0$ et $\vec{v}_A \neq 0$ $\Leftrightarrow \vec{v}_P = \vec{v}_A \neq 0$ $\forall P$ $\Leftrightarrow$ solide en translation
- $\vec{\omega} \neq 0$ et $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = 0$ $\Leftrightarrow \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = 0$ $\forall P$ $\Leftrightarrow$ solide en rotation (axe $\parallel \vec{\omega}$)
- $\vec{\omega} \neq 0$ et $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} \neq 0$ $\Leftrightarrow \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} \neq 0$ $\forall P$ $\Leftrightarrow$ solide en mvt hélicoïdal (rotation d'axe $\parallel \vec{\omega}$ + translation $\parallel \vec{\omega}$)

# 8.1 Axe istantané de rotation

Si $\vec{\omega} \neq 0$, il existe un et un seul axe de rotation instantané

## Comment trouver un point C sur l'axe instantané de rotation?

Plan perpendiculaire à $\vec{\omega}$




$$\begin{matrix} \vec{r}_{CA} \perp \vec{v}_A \\ \vec{r}_{CA} \perp \vec{\omega} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{CA} = b\, \vec{v}_A \wedge \vec{\omega}$$

$b$ à déterminer

Dans un mouvement circulaire: $v = \omega r$

$$r_{CA} = \frac{v_A}{\omega} = b v_A \omega \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{CA} = \frac{1}{\omega^2} \vec{v}_A \wedge \vec{\omega}$$

Au cour du temps

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

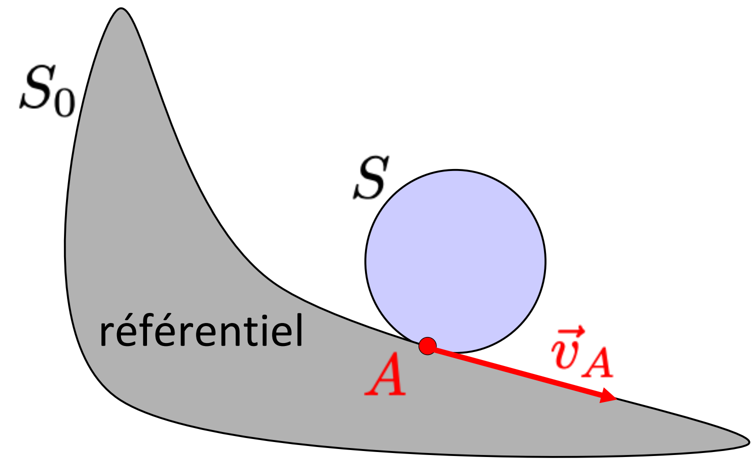
$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{v}_A + \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{v}_A) = \vec{v}_A + \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A)\vec{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \omega^2 \vec{v}_A = \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A)\vec{\omega}$$

$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A = 0 \;\; \Rightarrow \vec{v}_C = 0$ Les points sur l'axe instantané de rotation sont immobiles: **rotation**

$\vec{\omega} \cdot \vec{v}_A \neq 0 \;\; \Rightarrow \vec{v}_C \parallel \vec{\omega}$ Les points sur l'axe instantané de rotation ont un mouvement de translation parallèle à $\vec{\omega}$ : mouvement **hélicoïdal**

# 8.1 Solides en contact

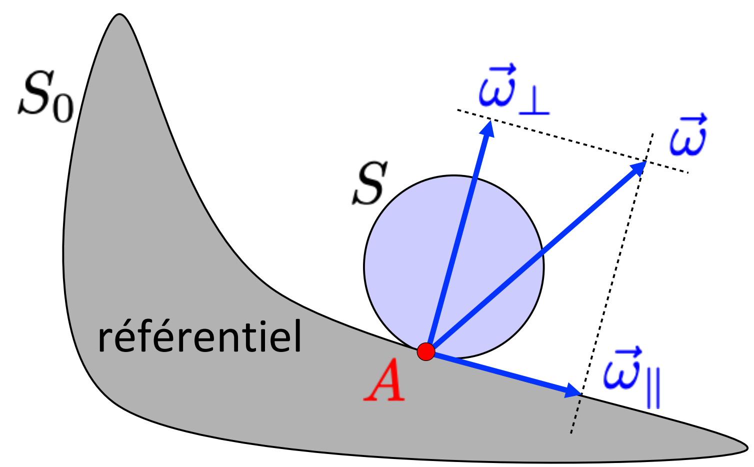
- Soient deux solides $S$ et $S_0$ restant constamment en contact
  - On choisit l'un des deux solides, $S_0$, comme référentiel
    $\Rightarrow S_0$ est immobile et on décrit
    le mouvement de $S$ par rapport à $S_0$
  - On admet que le contact est ponctuel.
    Soit $A$ le point de $S$ en contact avec $S_0$ au temps $t$




- $\vec{v}_A$ vitesse de glissement (de $S$ par rapport à $S_0$)

- Condition du roulement sans glissement : $\vec{v}_A = 0$
  - $A$ est alors sur l'axe instantané de rotation

- Vecteur instantané de rotation $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{//} + \vec{\omega}_{\perp}$
- Décomposition en composantes parallèle
  et perpendiculaire au plan tangent commun à $S$ et $S_0$ en $A$:
  $\vec{\omega}_{//} =$ vitesse angulaire de roulement
  $\vec{\omega}_{\perp} =$ vitesse angulaire de pivotement



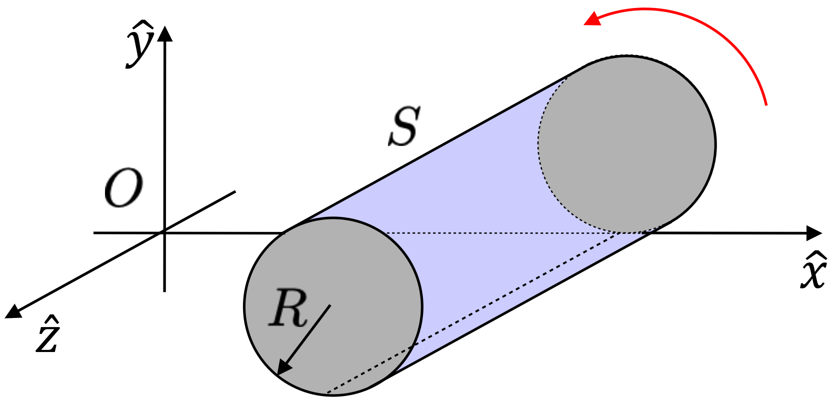

Résumé. Si $\vec{\omega} \neq 0$ :

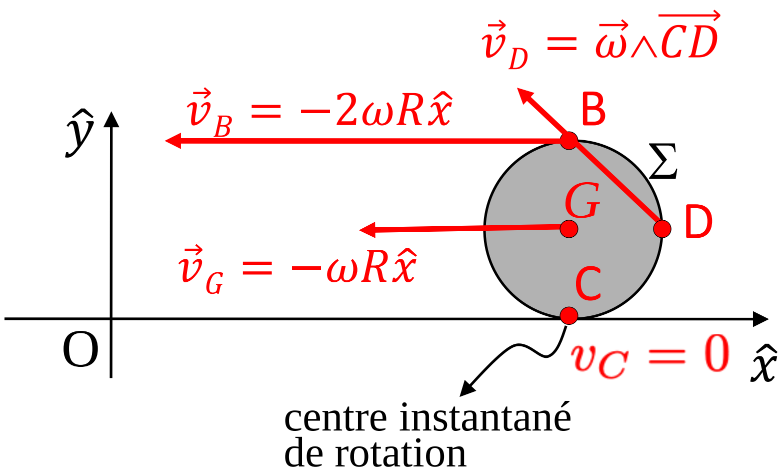
$\vec{v}_A = 0$: roulement sans glissement autour d'un axe par A

$\vec{v}_A \perp \vec{\omega}$: rotation (avec glissement)

$\vec{v}_A \parallel \vec{\omega}$: $\vec{r}_{CA} = \frac{1}{\omega^2} \vec{v}_A \wedge \vec{\omega} = 0 \quad \Rightarrow$ axe de rotation passe par A (mouvement **hélicoïdal)**

# 8.1 Ex.: cylindre sur un plan sans glissement

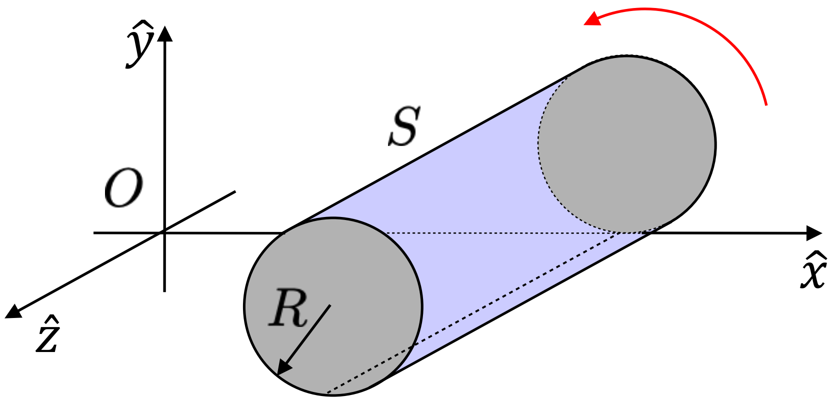



- En trois dimensions:
  - Un cylindre $S$ de rayon $R$ roule sans glisser sur le plan $Oxz$, avec la ligne de contact parallèle à l'axe $\hat{z}$
  - $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ = vitesse angulaire de roulement (il n'y a pas de pivotement)
- Dans le plan $Oxy$
  - On considère la section $\Sigma$ du cylindre
  - $\vec{v}_C = 0$ (pas de glissement) ⇒ $C$ est le centre instantané de rotation ⇒ pour chaque point P de $\Sigma$ on a que $\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CP}$
  - Par ex.:

$$\vec{v}_D = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} R \\ R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega R \\ \omega R \\ 0 \end{pmatrix}$$

# 8.1 Ex.: cylindre sur un plan sans glissement




- Trajectoire du CM et d'un point sur la surface du cylindre qui roule ($\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ ) sans glisser :

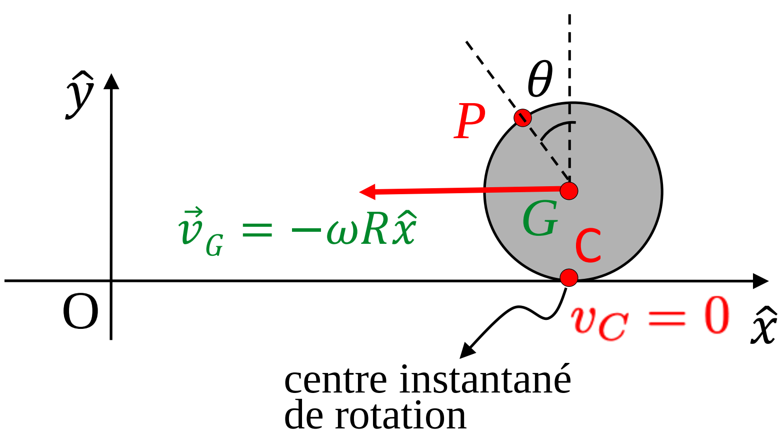
  - CM: $\vec{v}_G = -\omega R\hat{x} \;\Rightarrow\;$ $x_G = -\omega Rt$, $y_G = R$

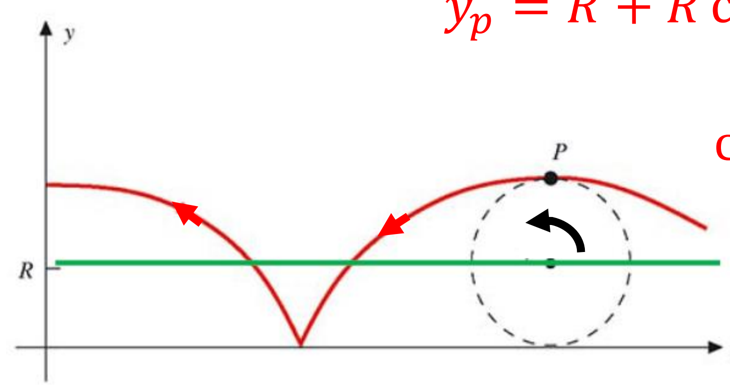
    Ligne droite

  - Point $P$: se déplace avec $G$ et il tourne autour de $G$

$$\vec{v}_P = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{CP} = \vec{\omega}\wedge\left(\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GP}\right)$$
$$= \omega\vec{z}\wedge(\mathrm{R}\hat{y} - R\sin\theta\,\hat{x} + R\cos\theta\,\hat{y})$$
$$= -\omega(R + R\cos\theta)\hat{x} - \omega R\sin\theta\hat{y}$$
$$= -\omega(R + R\cos\omega t)\hat{x} - \omega R\sin\omega t\,\hat{y}$$

$$x_p = -\omega Rt - R\sin\omega t$$
$$y_p = R + R\cos\omega t$$




cycloïde

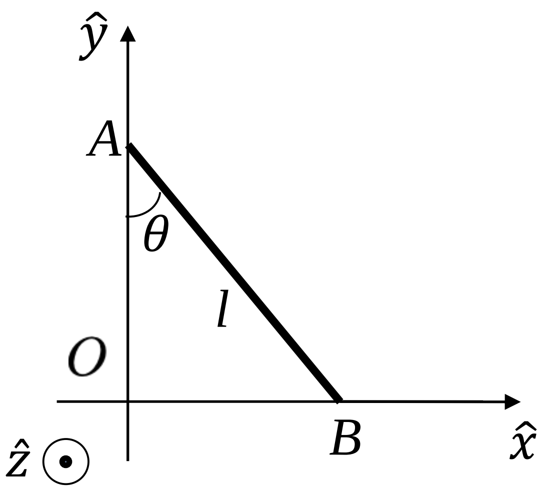
N.B.: dans l'approximation de point matériel, tous les points se déplacent à la vitesse du CM

# 8.1 Mouvement « plan-sur-plan »

- Définition: mouvement tel qu'un plan $\Sigma$ du solide $S$ reste constamment dans un plan fixe $\Pi$ du référentiel
  $\Leftrightarrow$
  à tout instant les vitesses de tous les points du solide sont parallèles à un plan fixe $\Pi$ du référentiel

- Conséquences:
  - le vecteur instantané de rotation $\vec{\omega}$ est perpendiculaire à $\Pi$
  - on est ramené à l'étude du mouvement d'une surface plane rigide $\Sigma$ (section de $S$) sur un plan $\Pi$;
  - dans ce plan, il y a un centre instantané de rotation (si $\omega \neq 0$)
- Lieu géométrique des centres instantanés de rotation:
  - dans le référentiel lié à $\Pi$: la base
  - dans le référentiel lié à $\Sigma$: la roulante

# 8.1 Ex.: barre qui glisse contre un mur dans un plan

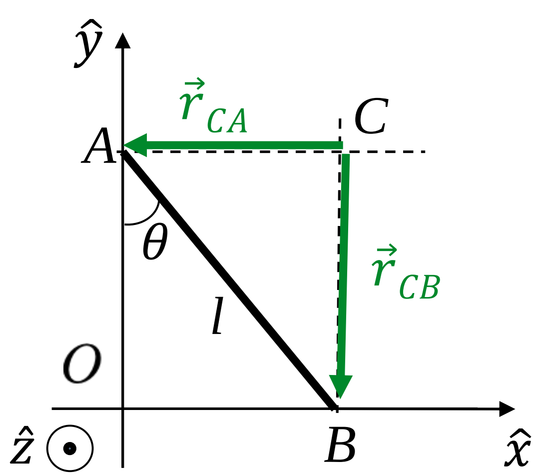



- Comme la barre reste dans le plan $\hat{x}\hat{y}$ il s'agit d'un mouvement plan-sur-plan et $\vec{\omega} = \omega\hat{z} = \dot{\theta}\hat{z}$:

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_A = l\cos\theta\,\hat{y} \qquad \vec{v}_A = -l\sin\theta\,\dot{\theta}\hat{y}$$

$$\overrightarrow{OB} = \vec{r}_B = l\sin\theta\,\hat{x} \qquad \vec{v}_B = l\cos\theta\,\dot{\theta}\hat{y}$$

Le point C par le quel passe l'axe instantané de rotation est défini par




$$\vec{r}_{CA} = \frac{1}{\omega^2}\vec{v}_A \wedge \vec{\omega} = -\frac{1}{\omega^2} l\sin\theta\,\omega^2 = -l\sin\theta\,\hat{x}$$

$$\vec{r}_{CB} = \frac{1}{\omega^2}\vec{v}_B \wedge \vec{\omega} = \frac{1}{\omega^2} l\cos\theta\,\omega^2 = -l\cos\theta\,\hat{y}$$

# 8.2 Théorèmes relatifs au moment cinétique

- Moment cinétique par rapport à $O$: $\vec{L}_O = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha$

Par rapport à un point A quelconque on a:

$$\vec{L}_A = \sum_\alpha \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP_\alpha}) \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = \overrightarrow{AO} \wedge \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha + \sum_\alpha \overrightarrow{OP_\alpha} \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha \Rightarrow$$

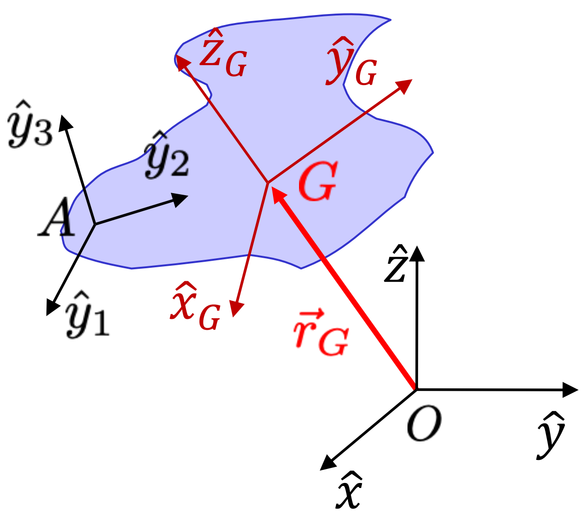
$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AO} \wedge M\vec{v}_G + \vec{L}_O$$

- Théorème du transfert: $\boxed{\vec{L}_G = \vec{L}_G^*}$

$\vec{L}_G^*$ est le moment cinétique calculé dans le référentiel du CM $G\hat{x}_G\hat{y}_G\hat{z}_G$

$$\vec{L}_G = \sum_\alpha \overrightarrow{GP_\alpha} \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = \sum_\alpha \overrightarrow{GP_\alpha} \wedge m_\alpha (\vec{v}_\alpha^* + \vec{v}_G) = \sum_\alpha \overrightarrow{GP_\alpha} \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha^* + \underbrace{(\sum_\alpha \overrightarrow{GP_\alpha} m_\alpha)}_{=0} \wedge \vec{v}_G = \vec{L}_G^* + 0 = \vec{L}_G^*$$

- 1er Théorème de König: $\boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{v}_G + \vec{L}_G^*}$




> Le moment cinétique totale par rapport à O est égale à la somme du moment cinétique de la masse totale M concentrée en CM et du moment cinétique calculé par rapport au CM

# 8.2 Théorèmes relatifs au moment cinétique

- Evolution du moment cinétique par rapport à $O$: $\vec{L}_O = \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha = \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{v}_G + \vec{L}_G^*$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}^{ext} + \frac{d\vec{L}_G^*}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\overrightarrow{OG}} \wedge M\vec{v}_G + \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{a}_G + \frac{d\vec{L}_G^*}{dt}$$
$$= 0 + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}^{ext} + \frac{d\vec{L}_G^*}{dt} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}^{ext} + \vec{M}_G^{ext\,*}$$

$$\boxed{\vec{M}_O^{ext} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}^{ext} + \vec{M}_G^{ext\,*} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}^{ext} + \vec{M}_G^{ext}}$$

$$\vec{L}_G = \vec{L}_G^*$$

- Théorème du moment cinétique par rapport à un point A quelconque

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext} - \vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AO} \wedge M\vec{v}_G + \vec{L}_O\right)$$
$$= \dot{\overrightarrow{AO}} \wedge M\vec{v}_G + \overrightarrow{AO} \wedge M\vec{a}_G + \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$
$$= -\vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{F}^{ext} + \vec{M}_O^{ext}$$
$$= -\vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{F}^{ext} + \sum_\alpha \overrightarrow{OP_\alpha} \wedge \vec{F}^{ext}$$
$$== -\vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G + \sum_\alpha \overrightarrow{AP_\alpha} \wedge \vec{F}^{ext}$$
$$= -\vec{v}_A \wedge M\vec{v}_G + \vec{M}_A^{ext}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A^{ext} \ \text{si}\ \vec{v}_A = 0, \vec{v}_A \parallel \vec{v}_G, A = G$$

# 8.2 Théorèmes relatifs au solide

- 2er Théorème de König:

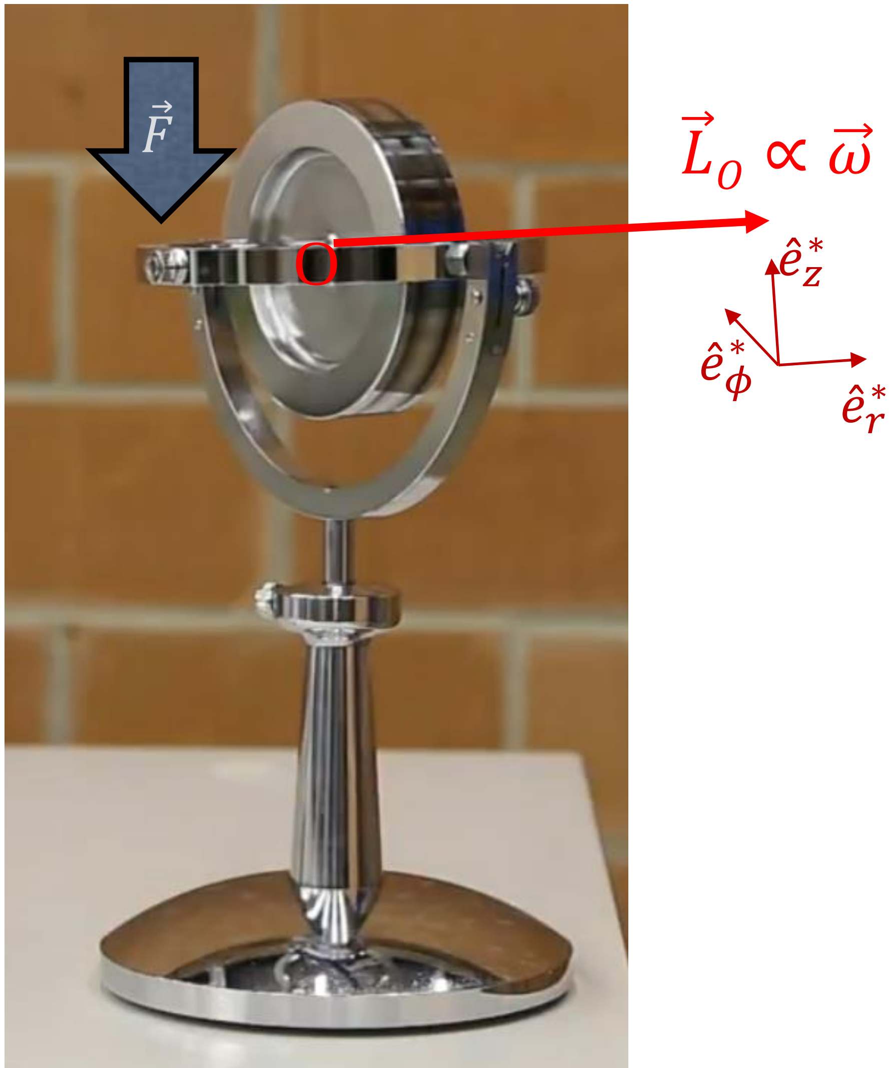
$$K = K^* + \frac{1}{2} M v_G^2$$

L'énergie cinétique totale par rapport à un point O est égale à la somme de l'énergie cinétique du CM et l'énergie cinétique du mouvement relatif autour du CM

$$K = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha (\vec{v}_\alpha^* + \vec{v}_G)^2 = \frac{1}{2}\sum_{\alpha} m_\alpha ({v_\alpha^*}^2 + v_G^2 + 2\vec{v}_\alpha^* \cdot \vec{v}_G) =$$

$$K^* + \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha v_G^2 + \left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha^*\right) \cdot \vec{v}_G = K^* + \frac{1}{2} M\, v_G^2$$

# 8.2 Théorèmes relatifs au solide




Que fera l'axe du disque?

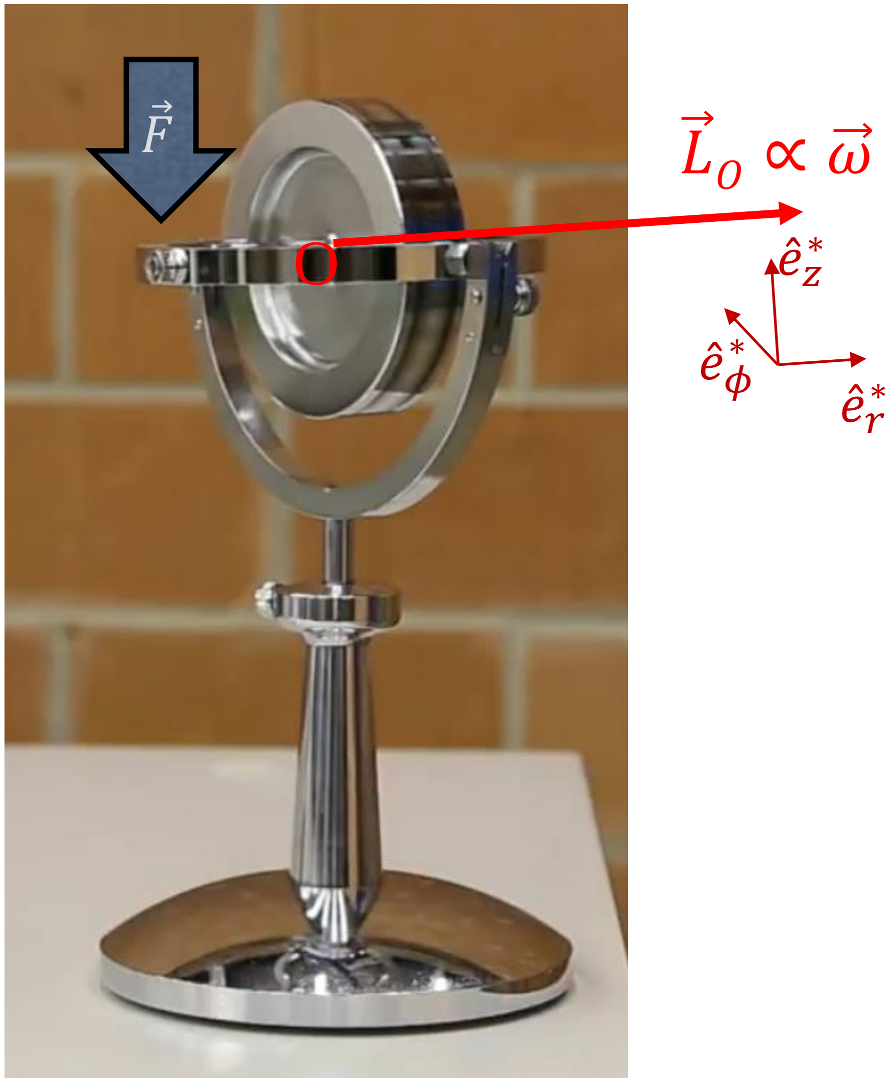
1) Ne bouge pas

2) Tourne sens horaire

3) Tourne sens anti-horaire

Demo: https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/501

# 8.2 Théorèmes relatifs au solide



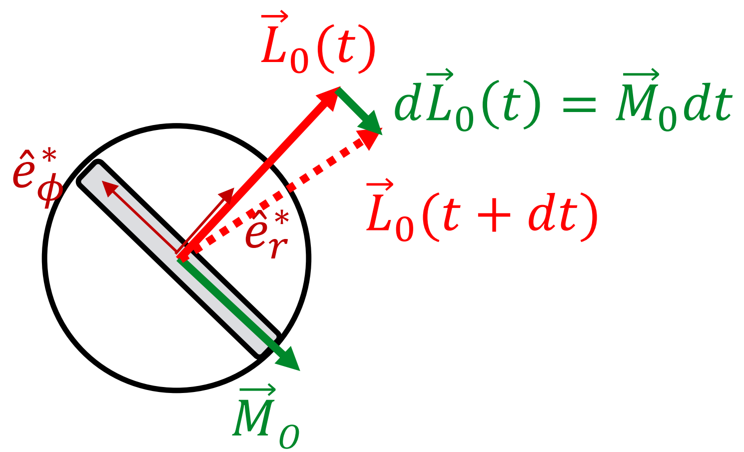

Que fera l'axe du disque?

1) Ne bouge pas

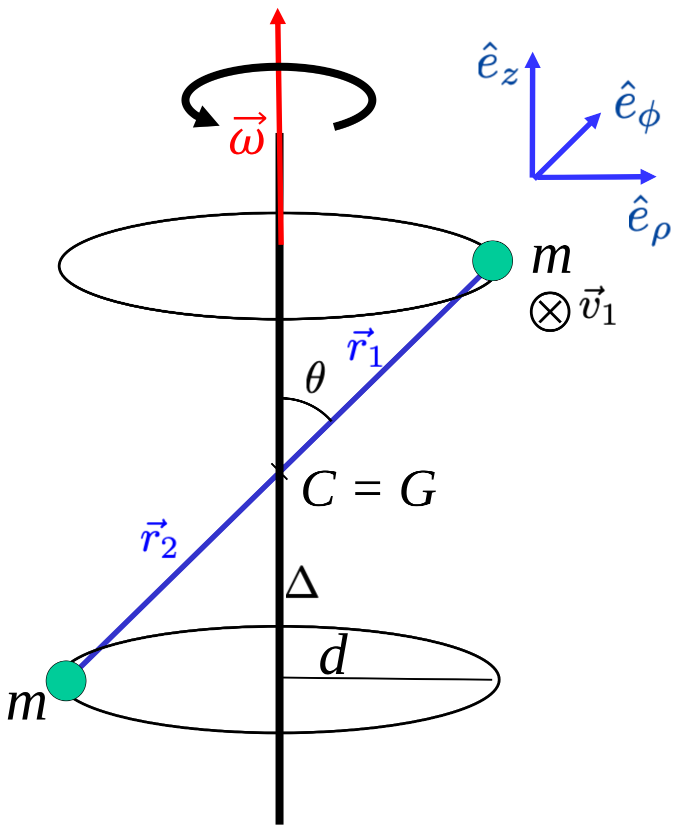
2) Tourne sens horaire

3) Tourne sens anti-horaire

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = -rF\hat{e}_\phi^*$$



# 8.2 Ex.: deux billes reliées par une tige (sans masse)




Que fera l'axe vertical?

1) Ne bouge pas

2) Tourne sens horaire

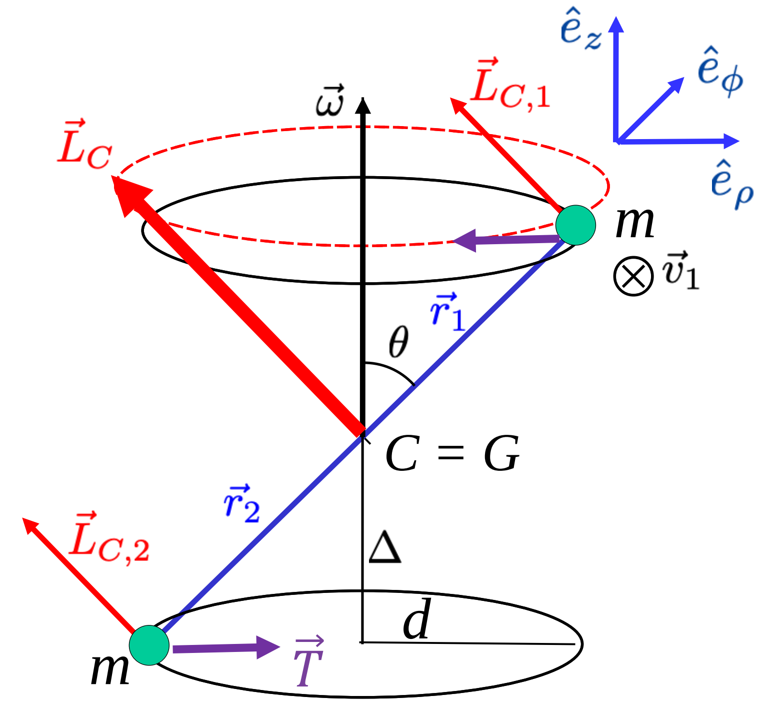
3) Tourne sens anti-horaire

Demo: https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/669

# 8.2 Ex.: deux billes reliées par une tige (sans masse)

Le centre de la tige C a $\vec{v}_C = 0$ et en plus est le centre de masse G ($\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha^* = 0$):

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = mr_1 - mr_1 = 0$$




Théorème du moment cinétique (par rapport au centre de masse G) $\dfrac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G$

- Deux masses $m$ telles que $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$ par rapport à C
- C est attaché à un axe de support Δ vertical avec $\vec{r}_1$ faisant un angle θ

- Cas $v_1 = v_2 = 0$

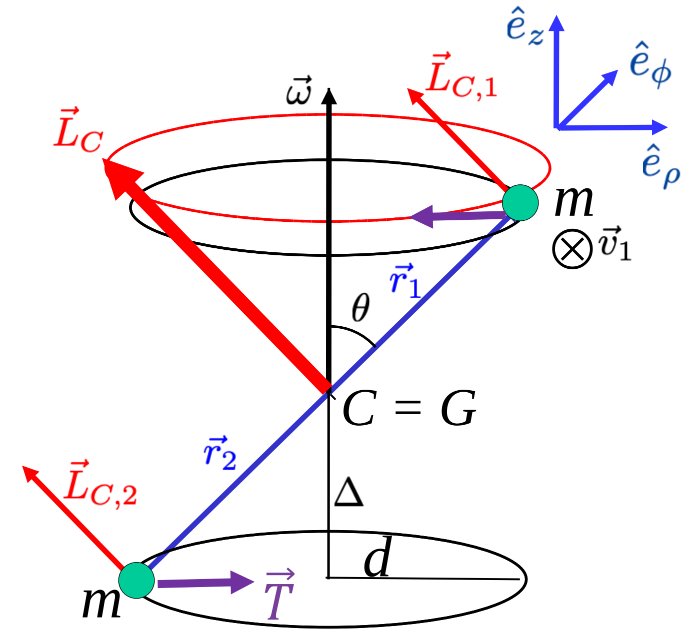
$$\vec{M}_{C,1} = \vec{r}_1 \wedge m\vec{g} = mr_1 g \sin\theta \hat{e}_\phi = -\vec{M}_{C,2}$$

$$\vec{M}_G = \vec{M}_C = \vec{M}_{C,1} + \vec{M}_{C,2} = 0$$

les deux billes restes en équilibre ($\vec{L}_G = 0$ et $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = 0$)

# 8.2 Ex.: deux billes reliées par une tige (sans masse)

Le centre de la tige C a $\vec{v}_C = 0$ et en plus est
le centre de masse G ($\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}^{\,*}_\alpha = 0$):
$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = mr_1 - mr_1 = 0$




Théorème du moment cinétique
(par rapport au centre de masse G) $\dfrac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G$

- à t = 0 on donne une impulsion tel que $v_1 = v_2 = v$

$$\vec{L}_{C,1} = \vec{r}_1 \wedge m\vec{v}_1 = mr_1 v \sin\theta\, \hat{e}_z - mr_1 v \cos\theta\, \hat{e}_\rho = \vec{L}_{C,2}$$

$$\vec{L}_G = \vec{L}_{C,1} + \vec{L}_{C,2} = 2\vec{L}_{C,1} = 2mr_1 v\,(\sin\theta\, \hat{e}_z - \cos\theta\, \hat{e}_\rho)$$

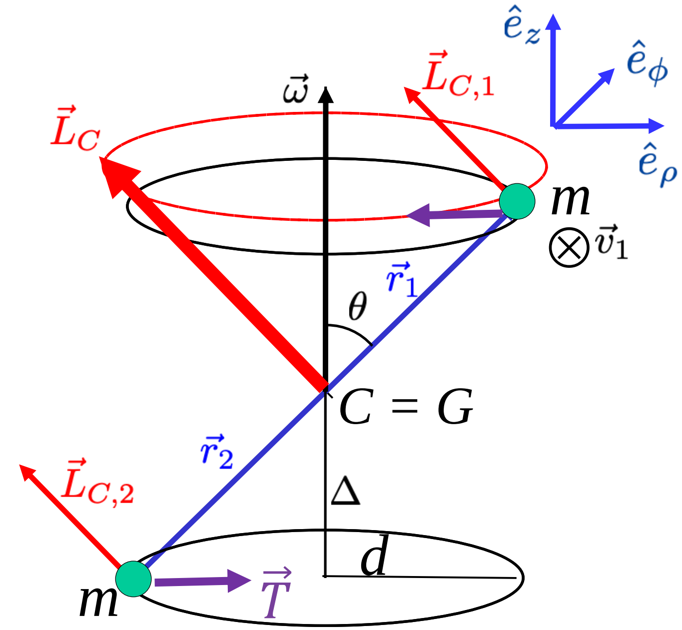
Les billes suivent un mouvement circulaire de rayon $d$ -> $\vec{T} = T\hat{e}_\rho = m\omega^2 d = m\omega^2 r_1 \sin\theta\, \hat{e}_\rho$

$$\vec{M}_{C,1} = \vec{r}_1 \wedge m\vec{g} + \vec{r}_1 \wedge \vec{T} = (mr_1 g \sin\theta - r_1 T\cos\theta)\hat{e}_\phi$$
$$\vec{M}_{C,2} = \vec{r}_2 \wedge m\vec{g} + \vec{r}_2 \wedge \vec{T} = (-mr_1 g \sin\theta - r_1 T\cos\theta)\hat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{M}_G = \vec{M}_{C,1} + \vec{M}_{C,2} = -2mr_1^2\omega^2 \cos\theta \sin\theta\, \hat{e}_\phi$$

# 8.2 Ex.: deux billes reliées par une tige (sans masse)

Deux façon de calculer $\frac{d\vec{L}_G}{dt}$




1) En utilisant la formule de Poisson ($\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i$):

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2mr_1 v \sin\theta \hat{e}_z - 2mr_1 v \cos\theta \, \hat{e}_\rho\right)$$

$$= 2mr_1 v\left(\sin\theta \, \frac{d\hat{e}_z}{dt} - \cos\theta \frac{d\hat{e}_\rho}{dt}\right) = 2mr_1 v\big(\sin\theta \;\; \vec{\omega} \wedge \hat{e}_z - \cos\theta \, \vec{\omega} \wedge \hat{e}_\rho\big) = -2mr_1 v\omega \cos\theta \, \hat{e}_\phi = \vec{M}_G = -2mr_1^2\omega^2 \cos\theta \sin\theta \, \hat{e}_\phi \Rightarrow$$

$$v = r_1 \omega \sin\theta = \omega d$$

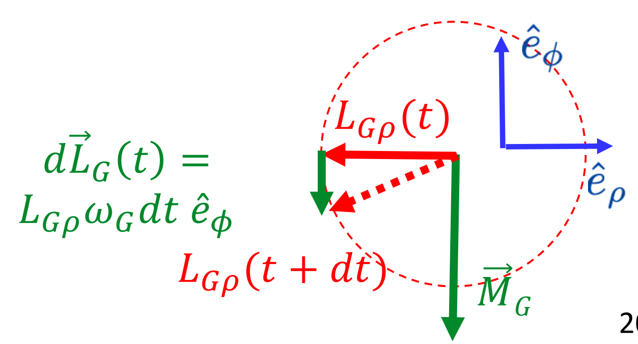
$\vec{L}_G$ précède autour de l'axe $\Delta$ avec $\omega_G = \omega = \frac{v}{d}$

2) Considérations géométriques: la composante selon $\hat{e}_\rho$ de $\mathrm{L_G}$ précède autour de $\hat{e}_z$ avec vitesse angulaire $\omega_G$ à déterminer

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = L_{G\rho}\omega_G \hat{e}_\phi = -2mr_1 v \cos\theta \, \omega_G \hat{e}_\phi = \vec{M}_G \; -2mr_1^2\omega^2 \cos\theta \sin\theta \hat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow$$

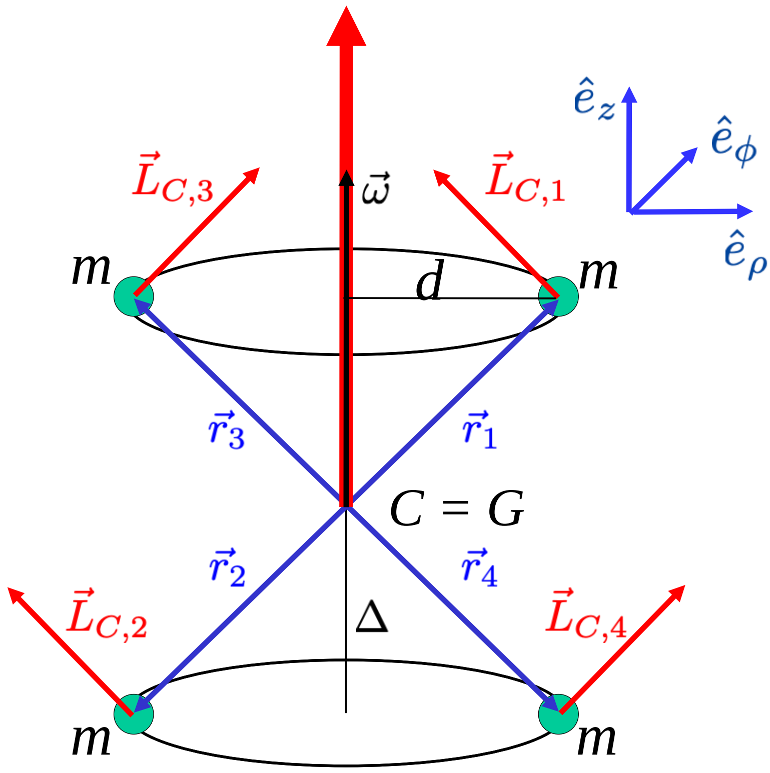
$$v\omega_G = r_1 \, \omega^2 \sin\theta \Rightarrow \omega d \omega_G = d\omega^2 \quad \Rightarrow \omega_G = \omega$$



# 8.2 Ex.: quatre billes reliées par une tige (sans masse)

On ajoute deux masses $m$ supplémentaires, afin de réaliser un

système symétrique par rapport à l'axe de rotation




$$\vec{L}_{C,1} = \vec{r}_1 \wedge m\vec{v}_1 = mr_1 v \sin\theta \hat{e}_z - mr_1 v \cos\theta\, \hat{e}_\rho = \vec{L}_{C,2}$$

$$\vec{L}_{C,3} = \vec{r}_3 \wedge m\vec{v}_3 = mr_1 v \sin\theta \hat{e}_z + mr_1 v \cos\theta\, \hat{e}_\rho = \vec{L}_{C,4}$$

$$\vec{L}_G = \vec{L}_C = \vec{L}_{C,1} + \vec{L}_{C,2} + \vec{L}_{C,3} + \vec{L}_{C,4} = 4mr_1 v \sin\theta \hat{e}_z = 4mdv\, \hat{e}_z$$
$$= 4md^2\omega\, \hat{e}_z = I_\Delta \omega\, \hat{e}_z = I_\Delta \vec{\omega}$$

$$\vec{M}_{C,1} = \vec{r}_1 \wedge m\vec{g} + \vec{r}_1 \wedge \vec{T} = (mr_1 g \sin\theta - r_1 T \cos\theta)\hat{e}_\phi = -\vec{M}_{C,3}$$

$$\vec{M}_{C,2} = \vec{r}_2 \wedge m\vec{g} + \vec{r}_2 \wedge \vec{T} = (-mr_1 g \sin\theta - r_1 T \cos\theta)\hat{e}_\phi = -\vec{M}_{C,4}$$

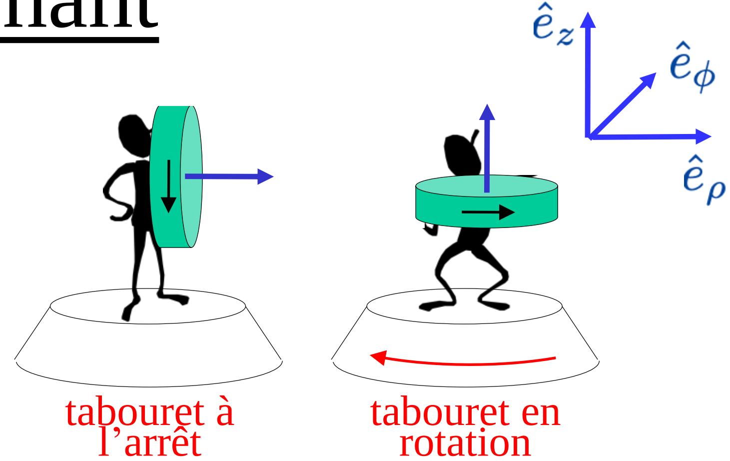
$$\vec{M}_G = \vec{M}_C = \vec{M}_{C,1} + \vec{M}_{C,2} + \vec{M}_{C,3} + \vec{M}_{C,4} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_G = I_\Delta \vec{\omega}$$ est conservé et parallèle à $\vec{\omega}$

$I_\Delta$ = moment d'inertie

# 8.2 Ex.: tabouret tournant

Pourquoi le tabouret tournant sans frottement
(à l'arrêt quand l'axe de la roue est horizontal)
se met-il en rotation quand on force
l'axe de la roue à être vertical ?



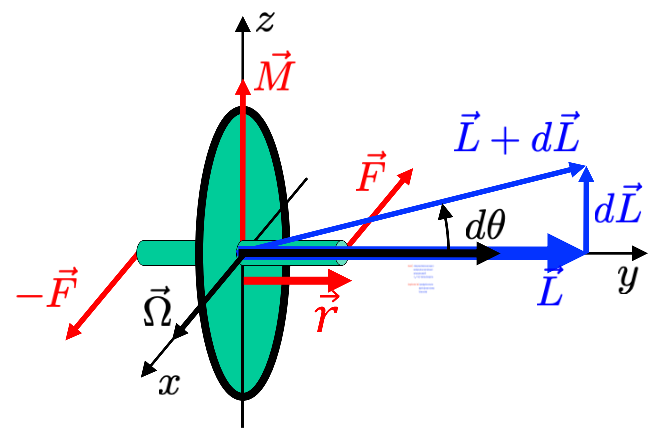

Conservation de $\vec{L}$: si le tabouret peut tourner, la composante $\hat{e}_z$ du moment cinétique du système (roue + personne + tabouret) est conservée ($mg\hat{z}$ ne peut pas générer une composante $M\hat{e}_z$)
-> ($L_{z,\text{tot}} = 0 = const$) -> le tabouret tourne en direction opposé à la roue

force interne: la personne applique des forces sur la roue pour la tourner. Le moment $M$ de ces forces ne change pas le moment cinétique totale mais que le moment $L$ de la roue

$$M = \frac{dL}{dt} = \frac{L\,d\theta}{dt} = L\Omega$$

rotation autour de axe $x$ avec vitesse angulaire $\Omega$

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}}$$




$$\vec{M} = 2\vec{r} \wedge \vec{F} = 2rF = L\Omega$$

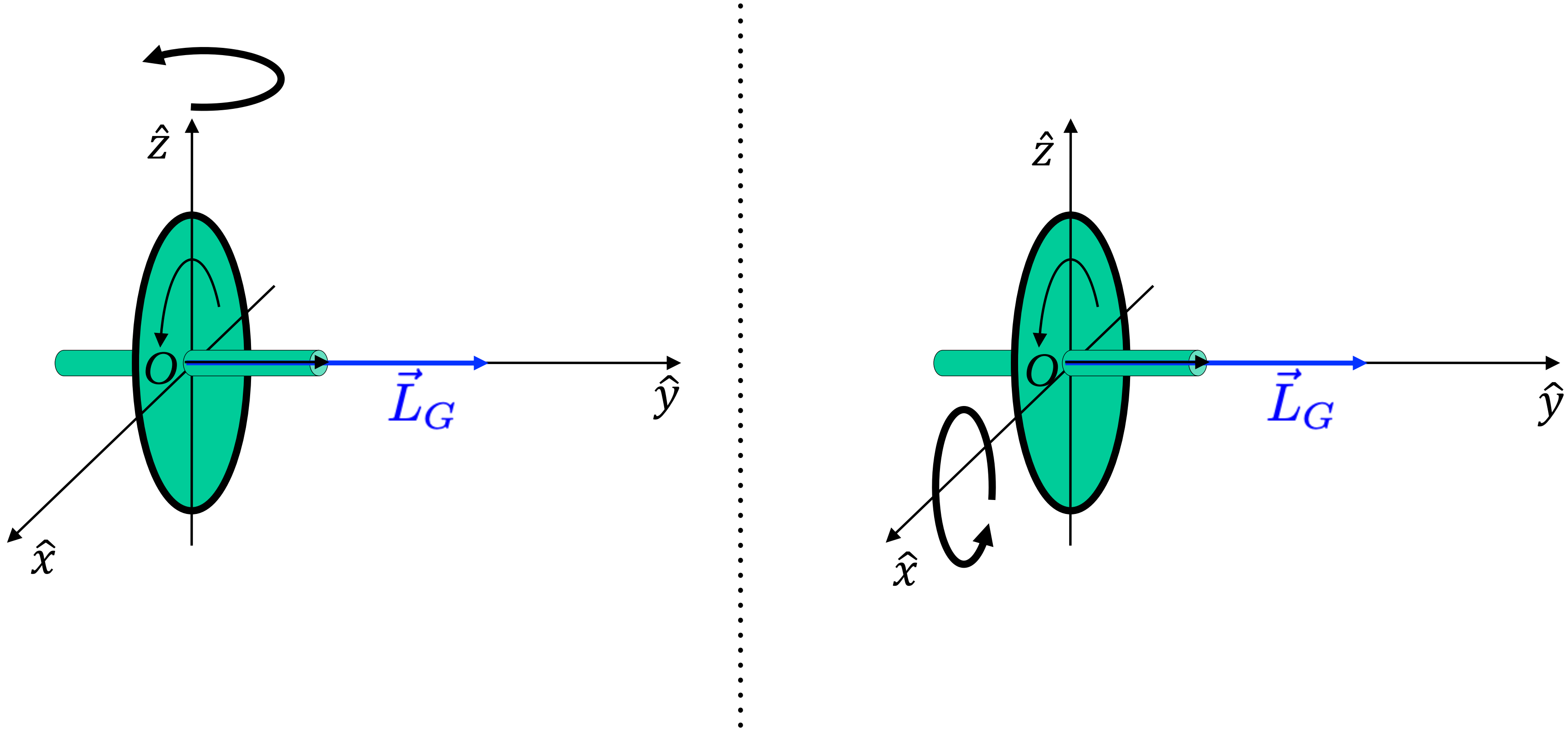
$$F = \frac{L\Omega}{2r}$$

Force appliquée par la personne pour tourner l'axe de rotation

Demo: https://auditoires-physique.epfl.ch/experiment/17

# 8.2 Ex.:Roue du velo

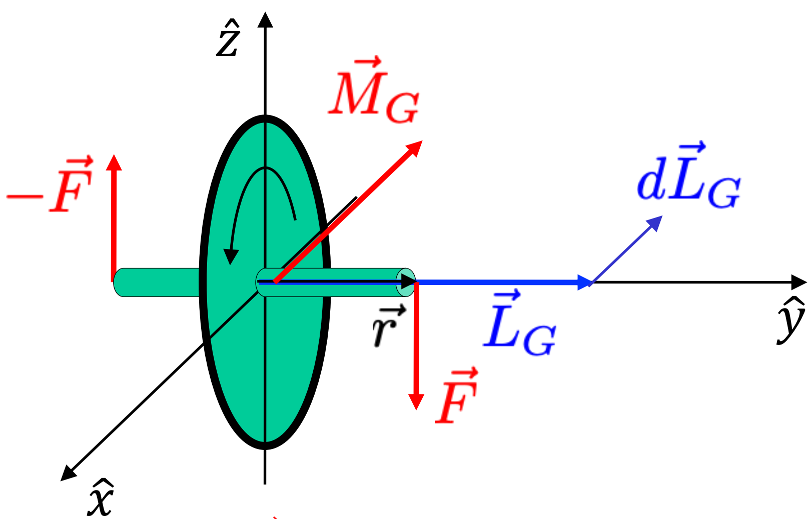
- Roue de vélo en rotation au tour de son axe de symétrie: $\vec{L}_G \parallel \vec{\omega} = \omega\hat{y}$
  - On veut changer la direction de l'axe de rotation; comment faut-il exercer le couple de force pour que l'axe tourne autour de Oz ? ou de Ox ?



# 8.2 Ex.:Roue du velo

- Roue de vélo en rotation au tour de son axe de symétrie: $\vec{L}_G \parallel \vec{\omega}$
  - On veut changer la direction de l'axe de rotation; comment faut-il exercer le couple de force pour que l'axe tourne autour de Ox ? ou de Oz ?

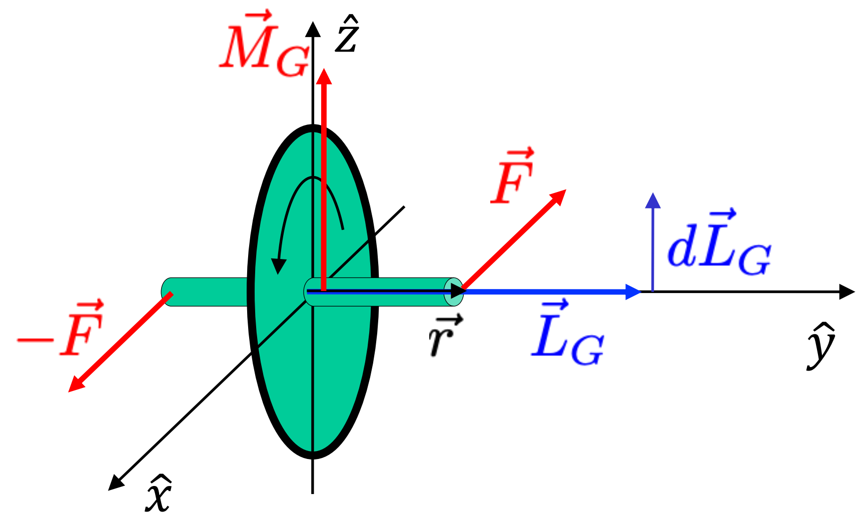
a) forces F parallèles à z




M selon $-\hat{x}$ $\Rightarrow$ $\frac{d\vec{L}}{dt}$ selon $-\hat{x}$

$\vec{L}_G$tourne dans le plan $\hat{x}\hat{y}$ autour de O$\hat{z}$

b) forces F parallèles à x




M selon $\hat{z}$ $\Rightarrow$ $\frac{d\vec{L}}{dt}$ selon $\hat{z}$

$\vec{L}_G$tourne dans le plan $\hat{y}\hat{z}$ autour de O$\hat{x}$

Théorème du moment cinétique

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}} = (\vec{r} \wedge \vec{F}) + (-\vec{r} \wedge -\vec{F}) = 2\vec{r} \wedge \vec{F}$$